

弱核条件下的 $T(b)$ 定理的小波证明*

许 明

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究弱核条件下的 $T(b)$ 定理, 并且在 $b = 1 + ia'(x)$, $-M < a' < M$, $M > 0$ 以及 b 是仿增长函数情况下, 利用小波证明了 $T(b)$ 定理.

关键词: 弱核; $T(b)$ 定理; 仿增长函数; 小波

中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0013-03

1 引言及主要定理

已经知道, 卷积奇异积分算子在核的光滑性方面, 只需满足 Hömander 条件

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq c < \infty, \forall y \neq 0$$

就可保证 $Tf(x)$ 是 L^2 有界的. 那么当奇异积分算子是非卷积的奇异积分算子时, 核的光滑性条件能否弱化, 能弱化到什么程度, 才能证得 T 的 L^2 有界性呢? 这是一个非常有意思的问题. Meyer^[1]首先做了这方面工作, 他在弱核条件下, 证明了 $T(1)$ 定理, 1993 年 Han 等^[2]给出了比以上更弱的条件下的同样强结果.

Deng 等^[3]用以下条件代替 Meyer 条件, 证明了 $T(1)$ 定理

- ① $\sup_{r>0} \int_{r \leq |x-y| \leq 2r} (|K(x,y)| + |K(y,x)|) dy \leq c;$
- ② $\sup_{\substack{r>0 \\ |u|+|v| \leq r}} \left\{ \int_{2^k r \leq |x-y| \leq 2^{k+1} r} |K(x+u, y+v) - K(x, y)| dx + \int_{2^k r \leq |x-y| \leq 2^{k+1} r} |K(x+u, y+v) - K(x, y)| dy \right\} = B(k);$
- ③ $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} B(k) < \infty.$

这个条件显然弱于 Meyer 的条件, 并且在某种意义下弱于 Han 的条件, 但至今无人知道核条件能最弱到什么程度.

本文利用 BCR 算法在如上的核条件下证明 $T(b)$ 定理, 即把 Deng 等的 $T(1)$ 定理推广为

$T(b)$ 定理. 本文只对 $Tb = T^*b = 0$ 时的情形加以证明, 因为可以利用仿积算子, 把一般情形转化为 $Tb = T^*b = 0$ 时的情形. 详情可参考文 [4]. 文中主要定理如下

定理 1 设 $b = 1 + ia'(x)$, $|a'(x)| \leq M$, $M > 0$, $T: (b\mathcal{D}) \rightarrow (b\mathcal{D})'$ 线性连续, 具有核条件 ① - ③, 并且 $M_b TM_b \in WBP$, $Tb = 0$, $T^*b = 0$, 那么 T 可扩充为 L^2 有界算子.

定义 1 称复值函数 b 为强仿增长的, 如果 $b \in L^\infty$, 且存在常数 $c > 0$, 使得

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I b(x) dx \right| \geq c, \forall I,$$

其中, I 是 $\mathbf{R}^n$ 的二进方体.

定理 2 设 b 是强仿增长函数, $T: (b\mathcal{D}) \rightarrow (b\mathcal{D})'$, 满足核条件 ① - ③, 并且 $M_b TM_b \in WBP$, $Tb = 0$, $T^*b = 0$, 那么 T 可扩充为 L^2 有界算子.

因为篇幅有限, 只讨论定理 2 的证明.

2 一般情形的证明

这个部分讨论 b 是强仿增函数时的 $T(b)$ 定理, 仍然设 $Tb = T^*b = 0$.

首先介绍龙瑞麟^[5]构造的一种 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的改进的 Harr 基^[4].

记 $\mathcal{D}_0$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中边长为 1 的二进方体的全体, 把 $\mathcal{D}_0$ 中每个 I 在 x_1 轴方向作二等分, 这样所得到的拟二进方体的全体记为 $\mathcal{D}_1$, 然后把 $\mathcal{D}_1$ 中每个 I 在 x_2 轴方向作二等分, ……当得到 $\mathcal{D}_n$ 后, 再重新沿 x_1 轴二等分, 如此继续以至于无穷, 对 $k < 0$, 按相反步骤进行归并, 即可得到

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19631080)

收稿日期: 2000-02-24; 作者简介: 许明 (1972-), 博士生.

$\vartheta = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \vartheta_k$, 每个 $I \in \vartheta_k$ 是 $I_1, I_2 \in \vartheta_{k+1}$ 的并, 注意每个 $I \in \vartheta_k$ 的体积正好是 2^{-k} .

利用上述构造, 有以下定理, 我们只需要一维时的情形.

定理 3^[5] 设 $b(x)$ 是任意给定的强仿增函数, 则如下 $\{\alpha_I, \beta_I\}_{I \in \vartheta, I = I_1 \cup I_2}$

$$\alpha_I = |I|^{-1/2} \left(\frac{|I_2|_b}{|I|_b} \chi_{I_1}(x) - \frac{|I_1|_b}{|I|_b} \chi_{I_2}(x) \right)$$

$$\beta_I = |I|^{-1/2} \left(\frac{1}{|I|_b} \chi_{I_1}(x) - \frac{1}{|I|_b} \chi_{I_2}(x) \right)$$

是 $L^2(\mathbf{R})$ 的下述意义下合适的双正交基, 即

$$\int \alpha_I^2(x) dx = \int \beta_I^2(x) dx = 1, \forall I \in \vartheta$$

$$\langle \alpha_I, \beta_J \rangle = \delta_{I,J},$$

$$\text{同时} \int \alpha_I(x) dx = \int \beta_I(x) dx = 0,$$

$$\int \alpha_I(x) \beta_J(x) dx = 0, \forall I \neq J, I, J \in \vartheta,$$

并且对任意 $f \in L^2 \cap L^1$, 有

$$f(x) = \sum_{I \in \vartheta} \langle f, \beta_I \rangle_b \alpha_I$$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{I \in \vartheta} |\langle f, \beta_I \rangle_b|^2 \right)^{1/2}$$

其中, $|I|_b = \left| \int_b b dx \right|$.

在上述构造下, 一样有 P_j, Q_j 算子,

$$P_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle_b \varphi_{jk}$$

$$Q_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle_b \tilde{\psi}_{jk}$$

其中, $\varphi_{jk} = \chi_{I_{jk}} / |I_{jk}|_b^{1/2}$, $\tilde{\psi}_{jk} = \beta_{I_{jk}}$, $\psi_{jk} = \alpha_{I_{jk}}$, $I_{jk} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, 另外 $I_{jk}^1 = I_{jk}^1 \cup I_{jk}^2$, $I_{jk}^1 = [k2^{-j}, (k+1/2)2^{-j}]$, $I_{jk}^2 = [(k+1/2)2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. 我们同样可以对 $M_b TM_b$ 进行非标准分解

$$M_b TM_b = M_b \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} P_j TM_b Q_j + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_j TM_b P_j + \right.$$

$$\left. \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_j TM_b Q_j \right) = T_1 + T_2 + T_3$$

只需讨论 T_1 即可, 所以只写出 T_1 的核

$$K(x, y) = \sum_{jkl} a(j, k, l) \tilde{\psi}_{jl}(y) b(y) \varphi_{jk}(x) b(x)$$

$$a(j, k, l) = \langle Tb \tilde{\psi}_{jl}, \varphi_{jk} \rangle_b$$

引理 1 如果 $T: (b\mathcal{D}) \rightarrow (b\mathcal{D})'$ 线性连续, 且满足定理 2 的条件, 那么可以得到

$$\sum_{R=0}^{\infty} R^{1/2} A(R) < \infty$$

其中, $A(R) = \sup_{j,l} \sum_{k: 2^R \leq |k-l| < 2^{R+1}} \{ |a(j, k, l)| + |a(j, l, k)| \}$

证明可以参考文 [3].

命题 1 设 $Tb = T^*b = 0$, 那么

$$\sum_k |I_{jk}|_b^{1/2} a(j, k, l) = 0$$

证明是直接的, 可以略去.

最后证明 T_1 的 L^2 有界性, 有

$$T_1 f = \sum_{jkl} a(j, k, l) \alpha_{jl} \varphi_{jk}(x) b(x) = \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{jkl} |I_{jk}|_b^{-1/2} \varphi_{jk}(x) b(x) \cdot$$

$$a_R(j, k, l) \alpha_{jl} = \sum_{R=0}^{\infty} T_R f$$

其中, $\alpha_{jl} = \langle f, \tilde{\psi}_{jl} \rangle_b$,

$$a_R(j, k, l) =$$

$$\begin{cases} |I_{jk}|_b^{1/2} a(j, k, l) & 2^R \leq |k-l| < 2^{R+1} \\ - \sum_{m: 2^R \leq |m-l| < 2^{R+1}} |I_{jk}|_b^{1/2} a(j, k, l) & k=l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

只需估计 $T_R f$ 的 L^2 算子模即可.

定理 4 $T: (b\mathcal{D}) \rightarrow (b\mathcal{D})'$ 线性连续算子, 在满足定理 2 的条件下, 有

$$\|T_R f\| \leq C \sqrt{R+1} A(R) \|f\|$$

证明 只考察 $j' \leq j$ 时的情况即可, 当 $2^{-j} k' \leq 2^{-j} k \leq 2^{-j} (k'+1)$, 由 b 是强仿增函数, 有

$$\int_R |\varphi_{jk}(x) b(x) \varphi_{j'k'}(x) b(x)| dx \leq 2^{-j} / (|I_{jk}|_b^{1/2} |I_{j'k'}|_b^{1/2}) \leq 2^{(j'-j)/2}$$

其他为 0. 因为 $|I_{jk}|_b^{-1/2} \leq C 2^{j/2}$, 所以

$$\|T_R f\|_2^2 \leq \int_R \left(\sum_{jkl} 2^{j/2} |a_R(j, k, l)| \chi_{I_{j,k}}(x) \right.$$

$$\left. \alpha(j, l) \right)^2 dx \leq \sum_{j, j': |j-j'| \leq R+1} 2^{(j+j')/2} 2^{(j'-j)/2} \cdot$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=2^{-j}k'}^{2^{-j}(k+1)} \sum_l \sum_{l'} |a_R(j, k, l) \alpha(j, l)| |\alpha(j', l')$$

$$|a_R(j, k', l')| + \sum_{j, j': |j-j'| \leq R+1} 2^{(j'-j)/2} 2^{(j+j')/2}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=2^{-j}k'}^{2^{-j}(k+1)} \sum_l \sum_{l'} |a_R(j, k, l) \alpha(j, l)|$$

$$|\alpha(j', l') a_R(j, k', l')| \leq \text{I} + \text{II}$$

而由 $a_R(j, k, l)$ 的定义, 知

$$\sum_l |a_R(j, k, l)| \leq C 2^{-j} A(R)$$

因此

$$\begin{aligned}
 I &\leq \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'}^{j'+R+1} 2^{(j'-j)/2} 2^{(j+j')/2} \\
 &\quad \sum_{k=2^{j-j'}k'}^{2^{j-j'}(k'+1)} \sum_{l=2^{j-j'}k'-2^{R+1}+1}^{2^{j-j'}(k'+1)} |a_R(j, k, l) \alpha(j, l)| \\
 &\quad | \alpha(j', l') a_R(j, k', l') | \leq \\
 &\quad CA(R) \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'}^{j'+R+1} 2^{(j+j')/4} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \\
 &\quad \left(\sum_{l'} | \alpha(j', l') a_R(j, k', l') |^2 \right)^{1/2} \cdot \\
 &\quad \left(\sum_{k=2^{j-j'}k'}^{2^{j-j'}(k'+1)} \sum_{l=2^{j-j'}k'-2^{R+1}+1}^{2^{j-j'}(k'+1)} |a_R(j, k, l) \alpha(j, l)|^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\quad CA^2(R) \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'}^{j'+R+1} \left(\sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'}^{j'+R+1} \right. \\
 &\quad \left. \left(\sum_{l'} | \alpha(j', l') |^2 \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. \left(\sum_l | \alpha(j, l) |^2 \right)^{1/2} \right) \leq \\
 &\quad C(R+1)A^2(R) \|f\|_2^2
 \end{aligned}$$

现在估计 Π , 因为当 $a_R(j, k - \mu, l) \neq 0$ 时,

l 满足

$$2^{j-j'}k' - 2^{R+1} + 1 \leq l \leq 2^{j-j'}k' + 2^{R+1} - 1,$$

所以

$$\begin{aligned}
 \Pi &= 2 \left\{ \left(\sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'+R+2}^{\infty} 2^{(j'-j)/2} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \right. \right. \\
 &\quad \left. \sum_{l=2^{j-j'}k'-2^{R+1}+1}^{2^{j-j'}k'+2^{R+1}-1} \sum_{k=2^{j-j'}k'}^{2^{j-j'}(k'+1)} \sum_{l'} \right) + \\
 &\quad \left(\sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'+R+2}^{\infty} 2^{(j'-j)/2} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \right. \\
 &\quad \left. \sum_{l=2^{j-j'}k'-2^{R+1}+1}^{2^{j-j'}(k'+1)+2^{R+1}-1} \sum_{k=2^{j-j'}k'}^{2^{j-j'}(k'+1)} \sum_{l'} \right) \} 2^{(j+j')/2} \cdot \\
 &\quad |a_R(j, k, l) \alpha(j, l)| \\
 &\quad | \alpha(j', l') a_R(j, k', l') | = \\
 &\quad \Pi_1 + \Pi_2
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 |\Pi_1| &\leq CA(R) \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'+R+2}^{\infty} 2^{(j+j')/4} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \\
 &\quad \left(\sum_{l'} | \alpha(j', l') |^2 a_R(j, k', l') \right)^{1/2} \cdot \\
 &\quad \left(\sum_{l=2^{j-j'}k'-2^{R+1}+1}^{2^{j-j'}k'+2^{R+1}-1} \sum_{k=2^{j-j'}k'}^{2^{j-j'}(k'+1)} |a_R(j, k, l)| \cdot \right. \\
 &\quad \left. | \alpha(j, l) |^2 \right)^{1/2} 2^{(j-j'+R)/2} \leq \\
 &\quad CA^2(R) \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j'+R+2}^{\infty} 2^{(j-j'+R)/2} \cdot \\
 &\quad \left(\sum_{l'} | \alpha(j', l') |^2 \right)^{1/2} \cdot \\
 &\quad \left(\sum_l | \alpha(j, l) |^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\quad CA^2(R) \|f\|_2^2
 \end{aligned}$$

同理, $\Pi_2 \leq CA^2(R) \|f\|_2^2$.

故 $\|T_R f\|_2 \leq \sqrt{R+1} A(R) \|f\|_2$.

从而定理 2 立即获证.

这样就得到了 $T(b)$ 定理, 从以上证明中可知, 计算的复杂性与选择小波基很有关系.

致谢: 感谢邓东皋教授和颜立新副教授的指导与帮助.

参考文献:

- [1] MEYER Y. La minimalité de l'espace de Besov et la continuité des opérateurs définies par des intégrales singulières[J]. Monografias de Mathematics, 1986(4): 175 - 250.
- [2] HAN Y S, HOFMANN S. $T(1)$ theorem for Besov and Yriebel-Lizorkin spaces[J]. Trans Amer Math Soc, 1993, 237: 839 - 845.
- [3] DENG D G, YAN L X, YANG Q X. Blocking analysis and $T(1)$ theorem[J]. Sci in China, 1998, 41(8): 801 - 808.
- [4] 邓东皋, 韩永生. H^p 空间论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992. 377 - 400.
- [5] 龙瑞麟. 高维小波分析[M]. 北京: 世界图书出版社, 1996. 210 - 300.

Wavelets-based Proof for $T(b)$ Theorem under Weak Kernel Conditions

XU Ming

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: $T(b)$ theorem under weak kernel conditions is studied. $T(b)$ theorem is proved by means of wavelets under the following condition: $b = 1 + ia'(x)(|a'| < M, M > 0)$, where b is a pseudoaccretive function.

Keywords: weak kernel; $T(b)$ theorem; pseudoaccretive function; wavelets